Historia i współczesne kierunki rozwoju matematyki

Andrzej Dąbrowski

1 Prehistoria matematyki

Wiele tysięcy lat temu, liczebność zbiorów była wyrażana przez porównywanie ze znanymi zbiorami (np. ręka symbolizowała liczbę pięć, dwie ręce - liczbę dziesięć, itd.), co w późniejszym okresie miało swoje odbicie w używanej symbolice. Należy podkreślić, że w różnych cywilizacjach używano różnych znaków i form zapisu. Poniżej podaję przegląd *wybranych osiągnięć matematycznych* (używając współczesnego języka) Babilończyków, starożytnego Egiptu, Grecji, Indii, Chin i Arabii. Oczywiście wiele zjawisk, wzorów i konstrukcji odkrywano na przestrzeni wieków wielokrotnie.

Jednym z głównych osiągnięć Babilończyków było pismo klinowe. Odczytane tablice pokazują, że kupcy zamieszkujący te rejony znali wagi i miary już 2000 lat p.n.e. Podstawą liczenia u Babilończyków był system sześćdziesiątkowy. Dla potrzeb budownictwa i pomiarów ziemi rozwinęli geometrię praktyczną. Umieli obliczać pola prostokąta, trójkąta prostokątnego o danych przyprostokątnych i trapezu oraz objętości prostopadłościanu i walca. Ponadto przyjmowali, że średnica koła wynosi 1/3 jej obwodu (tj. $\pi = 3$) oraz znali przybliżony wzór na objętość stożka ściętego o danej wysokości i polach podstaw. Posługiwali się tablicami dodawania, pierwiastkowania i odwracania liczb. Znali algorytm rozwiązywania równań kwadratowych oraz rozwiązywali niektóre równania sześcienne i dwukwadratowe. Znali też wzór przybliżony na obliczanie pierwiastków kwadratowych.

Uczeni starożytnego Egiptu stosowali algorytmy do obliczania pól powierzchni niektórych figur płaskich (kwadratu, prostokąta, trójkąta prostokątnego, koła) i objętości niektórych brył (walca oraz piramidy ściętej). Pole koła o średnicy d liczono według wzoru $(8d/9)^2$, więc tutaj $\pi \approx 3,16$. Egipcjanie mnożenie sprowadzali do podwajania, a następnie sumowania. Cała ta wiedza praktyczna w zakresie arytmetyki i geometrii (a także astronomii) zrodziła się z potrzeby mierzenia i liczenia, a także była dyktowana rozwojem gospodarki.

Uczeni starożytnej Grecji jako pierwsi używali logiki do wyprowadzania wniosków z definicji i aksjomatów. Tales z Miletu oraz Pitagoras są uważani za pionierów matematyki greckiej. Pierwszy z nich używał geometrii do obliczania wysokości piramid czy odległości statków od brzegu. Zbudował geometrię abstrakcyjną, której celem było precyzyjne badanie relacji zachodzących pomiędzy różnymi częściami figury. Znane twierdzenie Pitagorasa prawdopodobnie było znane dużo wcześniej, zaś Pitagoras podał pierwszy dowód i skonstruował trójki pitagorejskie. Warto podkreślić, że Pitagorejczycy jako pierwsi odkryli istnienie liczb niewymiernych, wprowadzili do matematyki średnie arytmetyczne, harmoniczne i geometryczne, odkryli liczbowe prawa skali muzycznej oraz skonstruowali wielościany foremne. Euklides jako pierwszy użył schematu: definicja, aksjomat, twierdzenie, dowód. *Elementy* Euklidesa to jedno z najważniejszych tekstów naukowych w historii. Dzieło to zawiera podsumowanie wiedzy geometrycznej, a także np. dowód istnienia nieskończenie wielu liczb pierwszych czy dowód niewymierności $\sqrt{2}$. Archimedes m.in. wyprowadził wzory na pole powierzchni oraz objetość kuli i walca, a także oszacował wartość liczby π jako $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. *Arytmetyka* Diofantosa zawiera rozwiązania wybranych równań i układów równań algebraicznych w liczbach wymiernych dodatnich. Należy podkreślić, że większość jego rozważań miała charakter geometryczny, włączając metody stycznych i siecznych. Właśnie na marginesie łacińskiego tłumaczenia tego dzieła, Fermat dopisał swoje słynne komentarze znane jako Wielkie Twierdzenie Fermata.

Powstanie dziesiętnego systemu liczbowego (około II wiek p.n.e.) to prawdopodobnie największe osiągnięcie Indii tego okresu. W VII wieku n.e. wprowadzili i zaczęli stosować liczby ujemne, pojawił się też symbol zera. Nieco później zaczęli oznaczać liczby ujemne na osi liczbowej. Hindusi umieli rozwiązywać równania kwadratowe, niektóre układy równań liniowych a także proste równania diofantyczne. Znali też algorytmy obliczania pierwiastków stopnia 2 i 3 oraz posługiwali się sferycznym układem współrzędnych.

Matematyka w dziewięciu księgach jest najstarszym ze znanych dokumentów matematyki chińskiej i pochodzi najprawdopodobniej z II wieku p.n.e. Księgi te zawierają między innymi: sposoby obliczania pól powierzchni figur płaskich oraz objętości różnych brył, zadania dotyczące procentów, proporcji, nadwyżki i niedomiaru. Ponadto narzędziem prowadzącym do rozwiązywania zadań z ostatnich trzech ksiąg były np twierdzenie Pitagorasa lub algorytm rozwiązywania układów równań liniowych 2 i 3 zmiennych (wzory odkryte przez Cramera w XVIII wieku !).

W dziele al-Chorezmiego *Algebra* występują po raz pierwszy takie terminy jak: równanie stopnia 1 i 2, dwumian, trójmian. Każde z zadań jest rozwiązywane przy pomocy algorytmów. Był to pierwszy tekst z algebry w języku arabskim, który zyskał dużą popularność; co więcej, matematycy XVI wieku uznali al-Chorezmiego za twórcę algebry. Al-Chorezmi napisał też inne dzieło *Księga o dodawaniu i odejmowaniu według rachunków Hindusów* - uważa się, że łacińskie tłumaczenie tego traktatu przyczyniło się do upowszechnienia systemu dziesiętnego w Europie.

2 Matematyka w XVII wieku

W okresie miedzy Euklidesem a Newtonem (więc około 1800 lat) nie nastąpił żaden istotny postęp w nauce o liczbach niewymiernych. Pojęcie liczby jako proporcji obowiązywało jeszcze w XVIII wieku - zatem pojęcie to ciągle sprawiało kłopoty; jeszcze w XVIII wieku niektórzy matematycy odrzucali istnienie liczb niewymiernych ! Euler w połowie XVIII wieku rozwinął teorię ułamków łańcuchowych i zastosował ją do przybliżania liczb niewymiernych przez liczby wymierne. W połowie XVII wieku po raz pierwszy w historii postawiono pytanie dotyczące niewymierności konkretnych liczb (np. e czy π). Dopiero Euler udowodnił, że liczby e oraz e^2 są niewymierne, zaś Legendre udowodnił, że π oraz π^2 są niewymierne. Dowody przestępności tych liczb pojawiły się dopiero w połowie XIX wieku (Hermite i Lindemann).

Na XVII wiek przypadają początki rozwoju rachunku różniczkowego i całkowego. Kepler wprowadził do geometrii pojęcia wielkości nieskończenie małych i nieskończenie dużych. Duża część jego badań miała swoje źródło w pracach Archimedesa dotyczących brył. Kepler uogólnił wyniki Archimedesa, wyznaczając objętości blisko stu nowych brył, a także jako pierwszy zaczął obliczać długości krzywych. Innym problemem, który rozważał, był: znając styczne do krzywej w każdym punkcie, odtworzyć krzywą (zatem w języku współczesnym, problem dotyczył obliczenia odpowiedniej całki). Fermat wyznaczał minimum i maksimum funkcji, postępując tak jak współcześnie stosuje sie w rachunku różniczkowym. Ponadto zastosował w pomysłowy sposób średnie arytmetyczne i geometryczne do wyznaczenia pewnych całek oznaczonych (używając współczesnego języka). Od Newtona pochodzi metoda interpolacyjna i metoda fluksji, a także pojęcie stycznej jako graniczne położenie siecznej. Niezależnie, rachunek różniczkowy stycznych stworzył Leibniz. Rozgorzała więc dyskusja wokół priorytetu w stworzeniu rachunku różniczkowego.

3 Euler, Gauss i Riemann

W historii matematyki XVIII i XIX wieku, kluczową rolę w jej rozwoju odegrały trzy nazwiska: Euler (1707-1783), Gauss (1798-1855) i Riemann (1826-1866).

W połowie XVIII wieku Euler usystematyzował dotychczasowe osiągnięcia analizy, dokładając nowe rezultaty i idee. Jego trzy dzieła z analizy matematycznej (uzupełniane i rozszerzane) stanowiły podstawę nauczania przedmiotu i badań w tej dziedzinie aż do połowy XIX wieku. W dziełach tych Euler rozwija również teorię szeregów, teorię funkcji, ułamki łańcuchowe, metody całkowania i rozwiązywania równań różniczkowych. Trzeba tu wspomnieć, że używane pojęcia nie zawsze były definiowane (lub były mało precyzyjne). Euler zapoczątkował również analizę zespoloną, wprowadzając podstawowe funkcje zespolone oraz definiując całkę w dziedzinie zespolonej. Euler był prekursorem w wielu innych działach matematyki (teoria liczb, algebra, teoria grafów) a także mechaniki, optyki i astronomii. Laplace'owi przypisuje się następujące zdanie, wyrażające wpływ Eulera na matematykę: *Czytajcie Eulera, czytajcie go - jest mistrzem nas wszystkich.*

Dalszy intensywny rozwój analizy zespolonej zawdzięczamy głównie badaniom Lagrange'a, Cauchy'ego, Riemanna i Weierstrassa. Powstały funkcje eliptyczne i teoria całek eliptycznych, powstały funkcje hipereliptyczne i abelowe, funkcje wielu zmiennych, równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe, rachunek wariacyjny.

Gauss uznawany jest za jednego z twórców geometrii nieeuklidesowej: opisał geometrię dowolnej powierzchni, podał sposób pomiaru odległości i wprowadził pojęcie krzywizny powierzchni. Ponadto, m.in. udowodnił zasadnicze twierdzenie algebry, prawo wzajemności reszt kwadratowych oraz podał twierdzenie o konstruowalności wielokątów foremnych. Jego *Disquisitiones Arithmeticae* z 1801 roku zapoczątkowało nowoczesną teorię liczb. Dzieło to zawiera wyniki własne oraz podsumowanie osiągnięć tak wybitnych matematyków w tej dziedzinie jak Fermat, Euler, Lagrange i Legendre. Miało ono duży wpływ na rozwój teorii liczb w XIX wieku (badania Kummera, Dirichleta i Dedekinda) i ciągle pozostaje inspiracją do badań naukowych w tej dziedzinie. Przez siebie współczesnych był określany mianem *Księcia matematyków*.

Riemann stworzył geometryczną teorię funkcji (powierzchnie Riemanna), sformułował podstawy geometrii różniczkowej (geometria Riemanna), sprecyzował pojęcie całki (całka Riemanna). Ponadto napisał jedyną pracę z teorii liczb, w której wprowadził i udowodnił podstawowe własności funkcji ζ, podał jej związki z rozmieszczeniem liczb pierwszych, a także sformułował (bez dowodu) twierdzenie, że nietrywialne zera zespolone tej funkcji leżą na prostej $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. To ostatnie stwierdzenie (znane jako hipoteza Riemanna) było sformułowane przez Hilberta w 1900 roku jako jeden z ważnych otwartych problemów (VIII problem Hilberta), a także zostało zaproponowane w 2000 roku jako jeden z problemów milenijnych.

Riemann rozszerzył teorię Gaussa (w szczególności, pojęcie krzywizny Gaussa) na przestrzenie wielowymiarowe na swoim wykładzie habilitacyjnym w 1854 roku - Gauss był obecny na tym wykładzie. Geometria riemannowska dała matematyczne podstawy ogólnej teorii względności.

4 Matematyka do końca XIX wieku

.

Pojęcie funkcji jest jednym z podstawowych pojęć matematycznych. Tablice pierwiastków kwadratowych w starożytności i opisy ruchu i przyśpieszenia w średniowieczu są przykładami funkcji. W okresie od XVI do końca XVIII wieku dominowały metody analitycznego opisu funkcji przy pomocy szeregów potęgowych. Jednak termin funkcja wystąpił po raz pierwszy w rękopisie Leibniza z drugiej połowy XVII wieku, zaś pierwsze formalne definicje funkcji podali w pierwszej połowie XVIII wieku J. Bernoulli i Euler. Pierwszą, zupełnie ogólną definicję funkcji podał Dirichlet w pierwszej połowie XIX wieku, zaś Cantor używał w drugiej połowie XIX wieku ogólnego pojęcia funkcji, które dotyczą już niekoniecznie liczb.

Jeśli geometria nie spełnia przynajmniej jednego z aksjomatów geometrii euklidesowej, to nazywa się geometrią nieeuklidesową. W XIX wieku stworzono szereg takich geometrii: geometria hiperboliczna, geometria eliptyczna. Przykładami modeli geometrii hiperbolicznej są: model Kleina, półpłaszczyzna Poincarego i model Minkowskiego (używana w szczególnej teorii względności). Wspólnym ich ogólnieniem jest geometria riemannowska.

Algebra do końca XV wieku dotyczyła głównie równań stopnia 1 i 2. W XVI wieku rozwiązano równania stopnia 3 i 4 oraz zaczęła się rozwijać symbolika algebraiczna - proces ten trwał około stu lat. W XVIII wieku wiele wyników Eulera, Lagrange'a, Galois, Cayleya i innych miała charakter abstrakcyjny. Teoria binarnych form kwadratowych oraz grupy permutacji z zastosowaniami do równań algebraicznych dały początek teorii grup. Pojęcie grupy Galois do dzisiaj jest fundamentalne dla współczesnej geometrii arytmetycznej. Do końca XIX pojawiły się ścisłe pojęcia grupy, ciała, pierścienia, przestrzeni liniowej. Monografia van der Waerdena *Moderne Algebra* z 1930 roku zamyka ten okres kształtowania sie pojęć w algebrze.

Na koniec, przytoczę kilka innych ważnych konstrukcji i rezultatów, które otworzyły nowe kierunki badań w matematyce XX wieku. Dalsze podsumowanie osiągnięć matematyki do końca XIX wieku oraz perspektywy jej rozwoju są omówione w następnym rozdziale.

- teoria szeregów trygonometrycznych Fouriera
- twierdzenie Weierstrassa o aproksymacji wielomianami funkcji ciągłych
- twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych (Cauchy)
- powstanie topologii, hipotezy Poincarego
- wprowadzenie szeregów Dirichleta
- kryterium rozwiązywalności równań algebraicznych stopni ≥ 5 w pierwiastnikach (Galois)
- wprowadzenie liczb p-adycznych (Hensel)
- algebraiczna teoria liczb w drugiej połowie XIX wieku (relacje między rozszerzeniami abelowymi ciał liczbowych i grupami klas ideałów, uogólnione prawa wzajemności, twierdzenia o gęstości dla ideałów pierwszych i L-funkcje Dedekinda) doprowadziła do powstania teorii ciał klas (Kronecker, Weber, Hilbert).
- przestrzenie Hilberta (wprowadzone pod koniec XIX przez Hilberta) są wykorzystywane w wielu działach fizyki (mechanika kwantowa czy kwantowa teoria pola).

5 Problemy Hilberta

Drugi Międzynarodowy Kongres Matematyków, który odbył się w Paryżu w 1900 roku, obradował w sekcjach *Arytmetyka i algebra*, *Analiza*, *Geometria*, *Mechanika* oraz *Bibliografia i historia*. Na ostatniej z nich, Hilbert wygłosił swój referat *Problemy przyszłości matematyki*, przy czym wybrał do omówienia 10 (spośród 23 opublikowanych w materiałach kongresowych) problemów. Problemy dotyczyły szerokiego spektrum zagadnień i pytań: od podstaw matematyki, teorii liczb, algebry, geometrii do równań różniczkowych i fizyki. Problemy te miały duży wpływ na rozwój matematyki w pierwszych dekadach XX wieku. Większość z nich została rozwiązana, część z nich była zbyt ogólna (np. aksjomatyzacja całej fizyki) aby mogła zostać zrealizowana.

Poniżej podaję sformułowania problemów oraz informacje o ich losach (rozwiązany czy nie, przez kogo, itd.) - często nad problemem pracowało wielu matematyków.

- **Hipoteza continuum: nie istnieje zbiór mocy pośredniej między mocą zbioru liczb wymiernych i liczb rzeczywistych**. Udowodniono, że hipoteza ta jest niezależna od aksjomatyki Zermelo-Fraenkla w teorii mnogości, tj. w oparciu o te aksjomaty nie można jej ani udowodnić ani obalić.
- **Udowodnić niesprzeczność aksjomatów arytmetyki**
- **Czy mając dane dwa wielościany o równej objętości, można zawsze rozłożyć jeden z nich na skończoną liczbę wielościennych części, a następnie złożyć w drugi ?**. Kontrprzykład podany przez Dehna.
- **Problem konstrukcji przestrzeni metrycznych, w których proste stanowią najkrótszą drogę pomiędzy punktami**. Problem uznany za zbyt ogólny.
- **Czy wszystkie grupy ciągłe są grupami Liego ?**. Rozwiązany przez Gleasona-Montgomery'ego-Zippina w 1953 roku.
- **Aksjomatyzacja całości fizyki**. Problem uznany za niematematyczny.

- **Czy liczba a^b, gdzie a jest liczbą algebraiczną $\neq 0, 1$, zaś b jest liczbą algebraiczną niewymierną, jest liczbą przestępna ?**. Rozwiązany przez Gelfonda i Schneidera (niezależnie) w 1934 roku.

- **Hipoteza Riemanna**. Problem otwarty.

- **Dowód uogólnionego prawa wzajemności dla każdego ciała liczbowego**. Problem częściowo rozwiązany, np. dla rozszerzeń abelowych przez Artina w 1927 roku.

- **Przewidzenie rozwiązalności każdego równania diofantycznego**. Twierdzenie Matiyasevicha z roku 1970-go głosi, że jest to niemożliwe.

- **Rozwinąć teorię form kwadratowych z dowolnymi algebraicznymi współczynnikami liczbowymi**. Problem rozwiązany przez Hassego w 1934 roku (zasada lokalno-globalna).

- **Rozszerzenie klasycznego twierdzenia Kroneckera-Webera na dowolne ciała liczbowe**. Problem otwarty.

- **Rozwiązywalność wszystkich równań stopnia 7 przy użyciu funkcji dwóch zmiennych**. Problem rozwiązany przez Arnolda i Kołmogorowa w latach 1956-7.

- **Dowód skończoności konstrukcji pewnych podpierścieni**. Kontrprzykład podany przez Nagatę w 1959 roku.

- **Ścisłe sformułowanie rachunku Schuberta**. Rozwiązany przez Van der Waerdena w 1930 roku.

- **Postulat badań nad topologią krzywych i powierzchni algebraicznych**. Problem otwarty.

- **Wyrażenie określonych funkcji rzeczywistych jako sum kwadratów**. Rozwiązany.

- **Czy istnieje nieforemny wielościan pozwalający na wypełnienie przestrzeni ? Jakie jest najgęstsze upakowanie sfer ?**

- **Czy rozwiązania lagranżjanów są zawsze analityczne ?**. Odpowiedzi twierdzące podane niezależnie przez de Giorgiego oraz Nasha w latach 1956-8.

- **Czy wszystkie zadania rachunku wariacyjnego z określonymi warunkami brzegowymi mają rozwiązania ?**. Rozwiązanie podano dopiero w 1998 roku.

- **Dowód istnienia liniowych równań różniczkowych z zadanymi grupami monodromii**. Problem rozwiązany przez Rörla w 1957 roku.

- **Uniformizacja relacji analitycznych za pomocą funkcji automorficznych**. Problem rozwiązany przez Poincarego w 1907 roku.

- **Dalszy rozwój rachunku wariacyjnego**

6 Główne osiągnięcia matematyczne XX wieku

Hilbert oczekiwał, że istnieje spójny system matematyczny. Jednak pierwszy z poniższych rezultatów pokazuje, że marzenie Hilberta nie może sie spełnić.

- **K. Gödel** udowodnił w 1931 roku twierdzenia o niezupełności, pokazujące granice logiki matematycznej. Okazuje się, że jeśli taki system obejmujący arytmetykę ma skończoną liczbę aksjomatów, to można w nim wskazać twierdzenia prawdziwe których nie da się wyprowadzić z tych aksjomatów.

- **P. Cohen** udowodnił w 1964 roku niezależność hipotezy continuum od standardowych aksjomatów teorii mnogości.

- **przestrzeń Banacha** pojęcie to zostało wprowadzone przez Banacha (i niezależnie, przez Wienera) w latach 30-tych XX wieku. Teoria przestrzeni Banacha i jej uogólnienia stały się fundamentalne dla rozwoju analizy funkcjonalnej (i całej matematyki).

- **twierdzenie Atiyaha-Singera o indeksie** (1963) głosi, że dla operatora różniczkowego eliptycznego na zwartej rozmaitości, indeksy analityczny i topologiczny są równe. Twierdzenie to (i jego uogólnienia) ma głębokie zastosowania w wielu działach matematyki (np. twierdzenie Riemanna-Rocha jest jego szczególnym przypadkiem) oraz w fizyce teoretycznej.

- **formuła śladu Selberga** (1956) Niech G będzie grupą Liego, zaś Γ jej podgrupą dyskretną koskończoną. Formuła Selberga wyraża charakter unitarnej reprezentacji G na przestrzeni funkcji $L^2(G/\Gamma)$ w terminach śladów pewnych funkcji na G. Gdy $G = \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{Z}$, to formuła ta sprowadza się do klasycznej formuły sumowania Poissona. Gdy Γ jest grupą podstawową powierzchni Riemanna, to formuła ta opisuje spektrum operatora Laplace'a w terminach geometrycznych (długości geodezyjnych na tej powierzchni). Warianty i uogólnienia formuły śladu Selberga mają szerokie zastosowania w geometrii arytmetycznej, teorii liczb, geometrii hiperbolicznej i fizyce matematycznej.

- **geometria fraktalna** już w XIX wieku odkryto obiekty, które wykazują własność samopodobieństwa (fraktale), jednak pojęcie to do matematyki zostało wprowadzone przez Mandelbrota w latach 70-tych XX wieku. Przykładami fraktali są zbiór Cantora, dywan Sierpińskiego, zbiory Mandelbrota i Julii. Struktury o budowie fraktalnej sa powszechne w przyrodzie: krystaliczne dendryty, systemy naczyń krwionośnych, fraktalna budowa zbóż. Istnieją programy do tworzenia obrazów fraktalnych.

- **A. Grothendieck** przebudował w latach 1958-1970 geometrię algebraiczną: uogólnił twierdzenie Hirzebrucha-Riemanna-Rocha, wprowadzając K-funktor, wprowadził i rozwinąl teorię schematów, kohomologie etalne, krystaliczne i algebraiczne de Rhama, toposy, algebraiczne grupy podstawowe, kategorie pochodne, motywy i kategorie tensorowe. Konstrukcje te doprowadziły do dowodu głębokich hipotez Weila a także odegrały istotną rolę w dowodzie Wilesa Wielkiego twierdzenia Fermata.

- **program Langlandsa** (1967-1970) lista głębokich hipotez łączących grupy Galois, formy automorficzne i teorię reprezentacji grup algebraicznych nad ciałami lokalnymi i globalnymi. Przypadek grupy $GL(1)$ redukuje się do teorii ciał klas. Hipoteza Shimury-Taniyamy-Weila o modularności potwierdza globalną hipotezę Langlandsa dla $GL(2)$- jest to szczególny przypadek hipotezy głoszącej, że dowolna motywiczna L-funkcja jest L-funkcją automorficzną. Drinfeld (1974, $n = 2$) i Laffourge (1998, dowolne n) udowodnili hipotezy Langlandsa dla $GL(n)$ nad ciałami funkcyjnymi. Lokalne hipotezy Langlandsa dla $GL(n)$ zostały udowodnione w serii prac przez Laumona, Rapoporta, Stuhlera, Taylora, Harrisa i Henniarta w latach 1993-2000.

- **Y. Matiyasevich** (1970) X problem Hilberta brzmiał: podać efektywną skończoną procedurę algorytmiczną, która na podstawie współczynników równania diofantycznego, rozstrzyga istnienie lub nieistnienie rozwiązania tego równania w dziedzinie liczb całkowitych. Matiyasevich znalazł negatywne rozwiązanie tego problemu. Należy podkreślić, że wynik ten nie oznacza, że istnieją problemy dotyczące równań diofantycznych które są matematycznie nierozstrzygalne.

- **dowód twierdzenia o czterech barwach** Twierdzenie to (w przybliżeniu) głosi, że dowolną mapę polityczną można zabarwić czterema kolorami tak, aby każde dwa kraje mające wspólną granicę miały inne kolory. Dowód tego rezultatu podali Haken i Appel w 1976 roku i wymagał sprawdzenia 1936 przypadków przy pomocy komputera. Do tej pory dowód znacznie uproszczono, jednak komputerowe wspomaganie wciąż było konieczne. Ciekawym jest fakt, że uogólnienie tego twierdzenia dla powierzchni poza płaszczyzną i sferą zostało udowodnione wcześniej i bez użycia komputera.

- **Klasyfikacja prostych grup skończonych** (zakończona w1983 roku) twierdzenie głosi, że każda skończona grupa prosta należy do jednej z nieskończonych rodzin grup prostych: grupy cykliczne $\mathbb{Z}_p$, grupy alternujące A_n $(n \geq 5)$, grupy typu Liego lub jest jedną z 27 tzw. grup sporadycznych. Dowód tego rezultatu jest rozproszony w ponad 500 artykułach napisanych przez ponad 100 autorów i w sumie liczy ponad 10000 stron.

- **Geometria nieprzemienna (A. Connes)** - geometryczne podejście do algebr nieprzemiennych, konstrukcja przestrzeni które lokalnie są zadane przez nieprzemienne algebry funkcji. W topologii, twierdzenie Gelfanda-Neimarka głosi, że zwarta topologiczna przestrzeń Hausdorfa może być odtworzona z algebry Banacha funkcji na niej. W geometrii algebraicznej, schematy algebraiczne lokalnie są zadane jako spektrum pierwsze pierścieni przemiennych z jedynką. Celem geometrii nieprzemiennej jest wspólne uogólnienie powyższych konstrukcji. Powstały konstrukcje nieprzemiennych przestrzeni, które znalazły zastosowania w różnych działach matematyki (geometria algebraiczna, analiza funkcjonalna, geometria różniczkowa, układy dynamiczne, K-teoria, teoria liczb, rachunek prawdopodobieństwa) i fizyki matematycznej (fizyka cząstek elementarnych, kwantowa grawitacja).

- **A. Wiles** udowodnił w 1994 roku Wielkie twierdzenie Fermata. Dzięki wcześniejszemu rezultatowi Ribeta, wystarczyło udowodnić tzw. hipotezę o modularności dla klasy semistabilnych krzywych eliptycznych. Dowód tej hipotezy jest głównym rezultatem Wilesa - wymagał on wypracowania i połączenia metod z wielu dziedzin matematyki. Warianty hipotezy o modularności (jako część programu Langlandsa), bogactwo aparatu wykorzystanego w dowodach oraz konsekwencje z pewnością pozostaną w centrum uwagi wielu pokoleń matematyków pracujących w geometrii arytmetycznej.

7 Medaliści Fieldsa a rozwój matematyki w XX i XXI wieku

Medal Fieldsa przyznaje się matematykom za wyniki które miały kluczowe znaczenie dla rozwoju matematyki. Został ufundowany w 1932 roku przez matematyka kanadyjskiego J.Ch. Fieldsa i jest odpowiednikiem Nagrody Nobla w matematyce. Przyznawany jest dwóm, trzem lub czterem matematykom podczas Międzynarodowych Kongresów Matematyków organizowanych co 4 lata (od roku 1936-go, z przerwą wojenną do roku 1950). Medal ten przyznaje się wyłącznie matematykom, którzy nie ukończyli 40 lat do 1 stycznia roku jego nadania. Zapis ten jest rygorystycznie przestrzegany: A. Wiles za dowód Wielkiego Twierdzenia Fermata nie otrzymał tego medalu, gdyż nieznacznie przekroczył 40 lat ...

Poniżej wykaz medalistów Fieldsa z podaniem nazwy dziedziny lub sekcji matematyki i zwięzła informacją o osiągnięciach. Z tego wykazu łatwo zaobserwować które dziedziny matematyki i w jakich okresach były i są wiodące - wybór laureatów medali Fieldsa podkreśla znaczenie uzyskanych rezultatów ale też zwraca uwagę na postęp w reprezentowanych dziedziniach matematyki. Pierwsze medale Fieldsa zostały przyznane za osiągnięcia w zakresie Analizy zespolonej, zaś od połowy XX wieku często pojawia się geometria algebraiczna i teoria liczb (lub dokładniej geometria arytmetyczna).

1936, Oslo

- **L. Ahlfors** [Finlandia] (Analiza zespolona) rezultaty dotyczące hipotezy Denjoy'a o liczbie asymptotycznych wartości funkcji całkowitej, opisanie przestrzeni moduli powierzchni Riemanna.
- **J. Douglas** [USA] (Analiza zespolona) głębokie rezultaty dotyczące wyznaczania powierzchni minimalnych.

1950, Cambridge (USA)

- **L. Schwartz** [Francja] (Analiza matematyczna) w jego pracach teoria dystrybucji uzyskała miano dopracowanej teorii z wieloma zastosowaniami.
- **A. Selberg** [Norwegia] (Teoria liczb) dowód że dodatnia proporcja nietrywialnych zer $\zeta(s)$ leży na prostej krytycznej, elementarny dowód twierdzenia o liczbach pierwszych, formuła śladu Selberga.

1954, Amsterdam

- **K. Kodaira** [Japonia] (Geometria algebraiczna) deformacja struktur zespolonych na rozmaitościach (Kodaira-Spencer), klasyfikacja powierzchni algebraicznych (klasyfikacja Kodairy), K3 powierzchnie (Kummer, Kähler, Kodaira).
- **J.-P. Serre** [Francja] (Topologia, Geometria algebraiczna, Teoria liczb) ciąg spektralny Leray-Serre'a, technika wyznaczania grup homotopii sfer, przebudowa geometrii algebraicznej (z Grothendieckiem i Delignem), hipotezy Serra o modularności reprezentacji Galois.

1958, Edinburg

- **K. Roth** [Wielka Brytania] (Teoria liczb) tw. Rotha w teorii aproksymacji diofantycznych.
- **R. Thom** [Francja] (Topologia różniczkowa, Teoria osobliwości, Teoria katastrof) tw. Thoma-Mathera o izotopii, tw. Thoma o transwersalności, przestrzenie Thoma.

1962, Sztokholm

- **L. Hörmander** [Szwecja] (Równania różniczkowe, operatory całkowe Fouriera) fundamentalny wkład do nowoczesnej analizy, zastosowanie operatorów pseudoróżniczkowych i operatorów całkowych Fouriera do liniowych równań różniczkowych cząstkowych.

- **J. Milnor** [USA] (Topologia, K-teoria, Układy dynamiczne) sfera 7-wymiarowa posiada niestandardową strukturę różniczkową (sfera egzotyczna), liczba Milnora, hipoteza Milnora w algebraicznej K-teorii, hipoteza Milnora w teorii węzłów, rozwłóknienie Milnora.

1966, Moskwa

- **M. Atiyah** [Wielka Brytania] (Topologia, K-teoria, Fizyka matematyczna) topologiczna K-teoria, tw. Atiyaha-Singera o indeksie, tw. Atiyaha-Botta - wariant formuły Lefschetza dla operatorów eliptycznych, instantony na sferze 4-wymiarowej.

- **P. Cohen** [USA] (Podstawy matematyki) dowód niezależności hipotezy continuum i pewnika wyboru od aksjomatów Zermelo-Fraenkela w teorii zbiorów, metoda forsingu (technika dowodzenia powyższego rezultatu).

- **A. Grothendieck** [Francja] (Analiza funkcjonalna, algebra homologiczna, K-teoria, Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna) teoria przestrzeni nuklearnych, tw. Riemanna-Rocha-Grothendiecka, przebudowa geometrii algebraicznej - teoria schematów.

- **S. Smale** [USA] (Topologia, Układy dynamiczne) tw. o h-kobordyzmie, dowód hipotezy Poincarego dla wymiarów ≥ 5.

1970, Nicea

- **A. Baker** [Wielka Brytania] (Teoria liczb) teoria liczb przestępnych, metody efektywne w teorii liczb (metoda form liniowych od logarytmów liczb algebraicznych).

- **H. Hironaka** [Japonia] (Geometria algebraiczna) głębokie tw. o rozwiązaniu osobliwości rozmaitości algebraicznych w charakterystyce zero.
- **S. Novikov** [ZSRR] (Topologia, Fizyka matematyczna) ciąg spektralny Adamsa-Nowikowa w stabilnej teorii homotopii, topologiczna niezmienniczość racjonalnych klas Pontriagina, problem Schottky.
- **J. Thompson** [USA] (Algebra) dowód faktu, że nieabelowa skończona prosta grupa ma parzysty rząd.

1974, Vancouver

- **E. Bombieri** [Włochy] (Teoria liczb, Geometria algebraiczna, Analiza matematyczna) tw. Bombieriego-Vinogradowa, sito asymptotyczne Bombieriego.
- **D. Mumford** [USA] (Geometria algebraiczna) przestrzenie moduli i geometryczna teoria inwariantów.

1978, Helsinki

- **P. Deligne** [Belgia] (Geometria algebraiczna, Topologia, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb) konstrukcja motywu formy modularnej, teoria Hodge'a, dowód hipotezy Weila, dowód hipotezy Ramanujana-Peterssona, przestrzenie moduli krzywych algebraicznych, rozmaitości Shimury jako przestrzeń parametrów dla motywów, hipoteza Deligne'a o periodach, kohomologie Deligne'a, transformata Fouriera-Deligne'a.
- **Ch. Fefferman** [USA] (Równania różniczkowe cząstkowe, Analiza Fourierowska, Analiza globalna) całki singularne i przestrzenie Hardy'ego, badanie asymptotyki jądra Bergmana poza brzegiem dziedzin pseudowypukłych.
- **G. Margoulis** [ZSRR] (Grupy algebraiczne, Teoria ergodyczna) dowód arytmetyczności krat w grupach algebraicznych, dowód klasycznej hipotezy Banacha-Ruziewicza: czy miara Lebesque jest jedyną znormalizowaną rotacyjnie niezmienniczą miarą na sferze n-wymiarowej, dowód hiptezy Oppenheima dotyczącej form kwadratowych i teorii aproksymacji diofantycznych.

- **D. Quillen** [USA] (Topologia, K-teoria, Algebra) architekt wyższej algebraicznej K-teorii, dowód hipotezy Adamsa, dowód hipotezy Serre'a.

1983, Warszawa

- **A. Connes** [Francja] (Geometria algebraiczna i nieprzemienna, Teoria liczb, Fizyka matematyczna) klasyfikacja faktorów injektywnych w teorii algebr von Neumanna, hipoteza Bauma-Connes'a w operatorowej K-teorii.
- **W. Thurston** [USA] (Topologia, Geometria hiperboliczna, Teoria foliacji) Każda struktura Haefligera na rozmaitości może być całkowalna do foliacji, w szczególności każda rozmaitość z zerową charakterystyką Eulera dopuszcza foliację kowymiaru jeden, hiperboliczna wersja twierdzenia Dehna o chirurgii.
- **S.-T. Yau** [USA] (Geometria różniczkowa) dowód hipotezy Calabi: istnienie metryki Einsteina-Kählera, rozmaitości Calabi-Yau, konsekwencje dla teorii strun, nierówności Miyaoka-Yau dla liczb Cherna na powierzchni.

1986, Berkeley

- **S. Donaldson** [Wielka Brytania] (Geometria symplektyczna, Topologia) tw. o diagonalizowalności nad Z formy przecięć na 4-rozmaitości, niezmiennik Donaldsona.
- **G. Faltings** [Niemcy] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb) dowód klasycznej hipotezy Mordella, dowód hipotezy Shafarevicha.
- **M. Freedman** [USA] (Geometria, Topologia) dowód hipotezy Poincarego w wymiarze 4, dowód istnienia egzotycznych R^4-rozmaitości (wspólnie z Kirbym).

1990, Kyoto

- **V. Drinfeld** [ZSRR] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb, Fizyka matematyczna) dowód lokalnej hipotezy Langlandsa dla GL(2) w przypadku funkcyjnym, moduły Drinfelda, grupy kwantowe.
- **V. Jones** [Nowa Zelandia] (Teoria operatorów, Topologia) algebry operatorowe, wielomian Jonesa węzła.
- **S. Mori** [Japonia] (Geometria algebraiczna) podejście do klasyfikacji rozmaitości algebraicznych, program Mori.
- **E. Witten** [USA] (Fizyka matematyczna) teoria superstrun, zależności między fundamentalną fizyką i współczesną matematyką.

1994, Zürich

- **J. Bourgain** [Belgia] (Analiza funkcjonalna, Teoria liczb, Układy dynamiczne) medal Fieldsa za fundamentalne rezultaty dotyczące geometrii przestrzeni Banacha, analizy harmonicznej, analitycznej teorii liczb, teorii ergodycznej i teorii grup.
- **P.-L. Lions** [Francja] (Równania różniczkowe cząstkowe) opis rozwiązań równania Boltzmanna.
- **J.-C. Yoccoz** [Francja] (Układy dynamiczne) medal Fieldsa za istotny wkład do teorii układów dynamicznych.
- **E. Zelmanov** [Rosja] (Algebra) nieskończenie-wymiarowe algebry Jordana, dowód faktu, że toższamość Engela dla algebr Liego implikuje nilpotentność w przypadku nieskończenie-wymiarowym.

1998, Berlin

- **R. Borcherds** [Wielka Brytania] (Teoria liczb, Algebra, Fizyka matematyczna) odkrył zaskakujące związki teorii grup skończonych (np monster grupy) z innymi działami matematyki, np. formami modularnymi, a także fizyką matematyczną.

- **T. Gowers** [Wielka Brytania] (Analiza funkcjonalna, Kombinatoryka) zastosował metody kombinatoryczne do podania kontrprzykładów do kilku klasycznych hipotez w teorii przestrzeni Banacha.
- **M. Kontsevich** [Rosja] (Fizyka matematyczna, Geometria algebraiczna) wprowadził nowe niezmienniki węzłów określone za pomocą całek typu Feynmana, wprowadził przestrzeń moduli stabilnych odwzorowań w topologicznej teorii pola.
- **C. McMullen** [USA] (Geometria hiperboliczna) medal Fieldsa za fundamentalne rezultaty w geometrii hiperbolicznej i teorii Teichmüllera.

2002, Pekin

- **L. Laffourge** [Francja] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb) Dowód lokalnej hipotezy Langlandsa dla przypadku funkcyjnego (uogólnienie rezultatu Drinfelda na dowolny wymiar).
- **V. Voevodsky** [Rosja] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Topologia, K-teoria, Teoria liczb) dowód hipotezy Milnora, konstrukcja kategorii geometrycznych motywów.

2006, Madryt

- **A. Okounkov** [Rosja] (Geometria algebraiczna, Rachunek prawdopodobieństwa, Fizyka matematyczna) teoria reprezentacji z zastosowaniami do geometrii algebraicznej, fizyki matematycznej i rachunku prawdopodobieństwa, kohomologie kwantowe pewnych schematów Hilberta.
- **G. Perelman** [Rosja] (Topologia, Geometria) Dowód hipotezy Poincarego w wymiarze 3.
- **T. Tao** [Australia] (Równania różniczkowe cząstkowe, Teoria liczb, Algebra) dowód istnienia dowolnie długich skończonych ciągów arytmetycznych złożonych wyłącznie z liczb pierwszych (wspólnie z Greenem).

- **W. Werner** [Francja] (Rachunek prawdopodobieństwa, Fizyka matematyczna) błądzenie przypadkowe, ewolucja Schrama-Loewnera).

2010, Hyberabad

- **C. Villani** [Francja] (Równania różniczkowe cząstkowe, Fizyka matematyczna) medal Fieldsa za nieliniowy damping Landaua i badanie rozwiązań równania Boltzmanna.
- **S. Smirnov** [Rosja] (Analiza zespolona, Układy dynamiczne, Rachunek prawdopodobieństwa) medal Fieldsa za fundamentalne wyniki dotyczące teorii perkolacji i modelu Izinga w wymiarze 2
- **Ngo Bao Chau** [Wietnam - Francja] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb) dowód Lematu Fundamentalnego w programie Langlandsa - bardzo trudnej przeszkody powstającej przy próbie stosowania wariantu formuły śladu Selberga w teorii form automofricznych.
- **E. Lindenstraus** [Izrael] (Teoria ergodyczna, Teoria liczb) uogólnienie klasycznych rezultatów Minkowskiego i Linnika na przypadek pewnych przestrzeni arytmetycznych.

2014, Seul

- **A. Avila** [Brazylia - Francja] (Układy dynamiczne) głębokie rezultaty w teorii układów dynamicznych, użycie idei renormalizacji.
- **M. Bhargava** [Kanada - Francja] (Geometria arytmetyczna, Teoria liczb, Algebra) stworzył potężne metody w geometrii liczb i algebrze, udowodnił że hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera zachodzi dla co najmniej $66,48\%$ krzywych eliptycznych (przy odpowiednim ustawieniu wszystkich takich krzywych w ciąg).
- **M. Hairer** [Austria - Wielka Brytania] (Równania różniczkowe cząstkowe, Rachunek prawdopodobieństwa) głębokie rezultaty w teorii stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych.

- **M. Mirzakhani** [Iran - USA] (Układy dynamiczne, Analiza zespolona) głębokie rezultaty w teorii powierzchni Riemanna i ich przestrzeni moduli.

2018 Rio de Janeiro

- **C. Birkar** [Iran - Wielka Brytania] (Geometria algebraiczna) głębokie rezultaty dotyczące klasyfikacji rozmaitości algebraicznych.
- **A. Figalli** [Włochy] (Równania różniczkowe cząstkowe, Teoria optymalizacji, Geometria, Rachunek prawdopodobieństwa) głębokie rezultaty dotyczące teorii optymalizacji i ich zastosowania w geometrii metrycznej, teorii równań różniczkowych cząstkowych i rachunku prawdopodobieństwa.
- **P. Scholze** [Niemcy] (Geometria algebraiczna, Geometria arytmetyczna, Teoria liczb) przebudowa geometrii arytmetycznej nad ciałami lokalnymi: wprowadzenie przestrzeni perfektoidalnych i zastosowanie do kohomologii Galois oraz nowych teorii kohomologii.
- **A. Venkatesh** [Australia] (Teoria liczb, Układy dynamiczne, Topologia, Teoria reprezentacji) odkrycie nowych głębokich związków między analityczną teorią liczb, topologią, układami dynamicznymi i teorią reprezentacji - co pozwoliło udowodnić pewne kasyczne hipotezy w każdej z tych dziedzin.

8 Problemy milenijne

Instytut Matematyczny Claya ogłosił w 2000 roku zestaw siedmiu problemów matematycznych, które powinny stymulować rozwój matematyki na najbliższe lata. Dwa z nich dotyczą teorii liczb i geometrii arytmetycznej, jeden geometrii algebraicznej, jeden pogranicza matematyki i informatyki, jeden topologii i dwa fizyki matematycznej. Za rozwiązanie każdego z nich wyznaczono milion dolarów nagrody.

- (i) **P vs NP**: problemy związane z kryptografią, czy kolorowaniem map prowadzą do zagadnień, których rozwiązania znamy, ale powstaje pytanie czy idealny komputer znajdzie je w czasie wielomianowym (tj. dostatecznie szybko). Ogólniej, czy istnieją problemy, których rozwiązania znamy, ale w żaden sposób nie da się ich znaleźć w czasie wielomianowym.

- (ii) **hipoteza Hodge'a**: na algebraicznych rozmaitościach rzutowych każdy cykl Hodge'a jest wymierną kombinacją liniową cykli algebraicznych.

- (iii) **hipoteza Poincarego**: głosi, że dowolna trójwymiarowa zwarta i jednospójna rozmaitość topologiczna bez brzegu jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową. Warto nadmienić, że jej uogólnienia na rozmaitości wymiaru ≥ 4 były udowodnione wcześniej (Smale dla wymiaru > 4 i Freedman dla wymiaru 4).

- (iv) **hipoteza Riemanna**: nietrywialne zera funkcji zeta Riemanna leżą na prostej $\mathrm{Re}(s) = 1/2$. Hipoteza ta ma fundamentalne znaczenie w różnych zagadnieniach analitycznej teorii liczb, związanych z rozmieszczeniem liczb pierwszych.

- (v) **teoria Yanga-Millsa**: dotyczy próby opisania jednym formalizmem matematycznym oddziaływania słabego, silnego oraz elektromagnetycznego. Klasyczna teoria Yanga-Millsa opisuje model matematyczny cząstek elementarnych i ich oddziaływań - postawiony problem dotyczy znalezienia oddziaływań typu Yanga-Milsa w teorii kwantowej.

- (vi) **równania Naviera-Stokesa**: problem dotyczy rozwiązań tych równań dla najbardziej skomplikowanych zjawisk hydrodynamicznych, takich jak wiry w wodzie, turbulencje, tornada itp.

- (vii) **hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera**: ranga grupy punktów krzywej eliptycznej E określonej nad ciałem liczb wymiernych jest równa krotności zera stowarzyszonej L-funkcji $L(E, s)$ w $s = 1$.

Dotychczas jedynie udało się udowodnić hipotezę Poincarego. W latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia, Hamilton nakreślił program dowodu ogólniejszej hipotezy (hipotezy geometryzacyjnej Thurstona), która implikuje hipotezę Poincarego. Perelmann udowodnił tę część hipotezy Thurstona, która jest wystarczająca dla wyprowadzenia hipotezy Poincarego. Wykorzystał tutaj pomysł Hamiltona (potoki Ricciego), ale dołożył nowe pomysły i konstrukcje. Jego prace są dość trudne technicznie: znajdujemy tu równania różniczkowe opisujące jak zmienia się metryka, pojawia się funkcjonał entropii, teorią chirurgii, ... Nagrody miliona dolarów Perelmann również nie przyjął.

Pozostałe problemy są ciągle otwarte. Wspomnę jedynie, że Bhargava (we współpracy z innymi matematykami) udowodnił ostatnio, że hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera zachodzi dla co najmniej $66,48\%$ krzywych eliptycznych (przy odpowiednim ustawieniu wszystkich takich krzywych w ciąg). Za stworzone przy tej okazji nowe metody w geometrii liczb, Bhargava otrzymał w 2014 roku medal Fieldsa - to pokazuje skalę trudności i wagę problemu.

9 Podsumowanie, obecność matematyki w innych naukach

Spis *Mathematics Subject Classification 2010* wyróżnia ponad 60 dużych dziedzin matematyki, z których każdą dzieli na kilka(naście) poddziedzin, a każdą z tych poddziedzin na kilka(naście) sekcji, co łącznie daje ponad cztery tysiące sekcji. W czasopismach matematycznych rocznie ukazuje się blisko sto tysięcy artykułów. Czy matematyk jest w stanie zapanować nad taką fragmentaryzacją matematyki i tak ogromną produkcją naukową ? Przeciętny matematyk publikuje przeważnie w zakresie jednej lub kilku sekcji, ale jak pokazuje życie, przełomowe odkrycia dokonują ci, których działalność dotyczy sekcji z różnych poddziedzin. Widać to na przykładach laureatów Medali Fieldsa, ale nie tylko. Niektóre poddziedziny matematyki wręcz wymuszają poruszanie się w obrębie wielu sekcji, nawet tych z innych poddziedzin. Problemy milenijne są również tak sformułowane, że raczej wykluczają możliwość rozwiązania przez waskiego specjalistę. Zatem matematyka jako dziedzina nauki rozwija się dynamicznie, nie tracąc przy tym swojej jedności.

Matematyka jest wszechobecna w innych naukach. O ile matematyka czysta rozwija się bez tzw. zastosowań, o tyle trudno sobie wyobrazić fizykę (teoria względności, mechanika kwantowa, elektrodynamika, itd) bez metod matematycznych, zarówno tych klasycznych (analiza matematyczna, równania różniczkowe) jak i współczesnych (teoria reprezentacji, czy geometria algebraiczna a nawet teoria liczb). Zastosowania matematyki sięgają dużo dalej: procesy stochastyczne i teoria gier w ekonomii, metody statystyczne w naukach społecznych, algorytmy, rachunek prawdopodobieństwa i teoria sterowania w naukach przyrodniczych, itd.

10 Jak przedstawić dotychczasowe osiągnięcia i współczesne kierunki rozwoju matematyki w sposób encyklopedyczny ?

Jest to zadanie prawie niewykonalne. Istnieją setki (a nawet tysiące) artykułów przeglądowych, podręczników i monografii wprowadzających czytelnika do różnych działów matematyki lub wybranych zagadnień. Grupa francuskich matematyków pod pseudonimem Bourbaki próbowała opracować kurs matematyki w postaci kilkunastu zaawansowanych podręczników, prezentujących dotychczasowy stan wiedzy w wybranych działach. Od roku 1939 do wczesnych lat 80-tych XX wieku wydano XI tomów dotyczących głównie podstaw matematyki, algebry, topologii i analizy; w roku 2016 wyszedł tom poświęcony topologii algebraicznej. Niektóre pozycje jak *Algebre commutative* są bardzo cenne i wciąż aktualne, zaś niektóre stały się nieaktualne bardzo szybko.

Na przełomie lat siedemdziesiątych i osiemdziesiątych ubiegłego stulecia ukazała się Encyklopedia Matematyki (w 5-ciu tomach) w języku rosyjskim. Dotyczyła ona wszystkich działów matematyki. Podstawą były głównie prace przeglądowe dotyczące ważnych kierunków rozwoju matematyki. Celem była dostępność zawartego materiału dla studentów matematyki, matematyków z różnych dziedzin i specjalistów z innych obszarów nauki stosujących w swojej działalności metody matematyczne. Jest to bardzo cenna pozycja, napisana przy udziale wielu wybitnych matematyków.

W latach 1988-1995 ukazały się angielskie wersje powyższych tomów. W 2002 roku ukazała się *Encyclopedia of Mathematics*, zawierająca około 50000 pojęć matematycznych na 8000 stronach. Obecnie istnieje ogólnodostępna wersja elektroniczna tego wydania, która jest ciągle uzupełniana.

11 Proponowane tytuły tomów Encyklopedii Matematyki

Proponowane poniżej nazwy tomów Encyklopedii Matematyki uwzględniają podział wg *Mathematics Subject Classification 2010.* Oczywiście, nazwy tomów i ich zawartość mogą ulec nieznacznym modyfikacjom, ale w sumie powinny zawrzeć wszystkie najważniejsze hasła oraz informacje o głównych osiągnięciach i kierunkach rozwoju matematyki.

- **I Logika i podstawy matematyki** teoria modeli, modele niestandardowe, teoria zbiorów, teoria dowodu, teoria rekursji, matematyka konstruktywna
- **II Ogólne systemy algebraiczne** teoria krat, algebry Boole'a, struktury algebraiczne, rozmaitości
- **III Matematyka dyskretna** kombinatoryka, teoria grafów, geometria skończona, algorytmika
- **IV Teoria liczb** analityczna teoria liczb, algebraiczna teoria liczb, addytywna i multyplikatywna teoria liczb, geometryczna teoria liczb, probabilistyczna teoria liczb, aproksymacje diofantyczne i teoria liczb przestępnych, równania diofantyczne, formy automorficzne, zeta i L-funkcje, hipoteza Riemanna, zastosowania w kryptografii
- **V Geometria algebraiczna** krzywe i powierzchnie algebraiczne, rozmaitości abelowe, specjalne typy rozmaitości, teoria schematów, teorie kohomologii, rozmaitości algebraiczne nad ciałami specjalnymi
- **VI Geometria arytmetyczna** równania diofantyczne, reprezentacje Galois, reprezentacje automorficzne, rozmaitości algebraiczne nad ciałami skończonymi, lokalnymi i globalnymi, punkty wymierne na rozmaitościach algebraicznych nad ciałami arytmetycznymi, hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera, program Langlandsa
- **VII K-teoria** grupy Grothendiecka, Whiteheada i Steinberga, konstrukcje Milnora i Quillena, K-teoria w geometrii, topologii, teorii liczb i analizie funkcjonalnej
- **VIII Algebra** algebra liniowa i teoria macierzy, teoria ciał i wielomianów, grupy, pierścienie, moduły, algebry, teoria kategorii i algebra homologiczna, elementy teorii reprezentacji
- **IX Analiza rzeczywista i zespolona** funkcje rzeczywiste, ciągłość, szeregi, pochodne, całki, teoria aproksymacji, analiza Fouriera, funkcje

jednej i wielu zmiennych, rozmaitości i przestrzenie analityczne, funkcje specjalne

- **X Analiza funkcjonalna i teoria operatorow** przestrzenie funkcyjne, Przestrzenie Hilberta i Banacha, teoria operatorów
- **XI Równania różniczkowe zwyczajne** zagadnienia brzegowe, stabilność rozwiązań
- **XII Równania różniczkowe cząstkowe** równania eliptyczne i hipoeliptyczne, równania paraboliczne i hiperboliczne, równania fizyki matematycznej, operatory różniczkowe i pseudoróżniczkowe, zagadnienia brzegowe
- **XIII Rachunek wariacyjny i teoria optymalizacji**
- **XIV Geometria** podstawy geometrii, geometrie nieeuklidesowe, geometria różniczkowa
- **XV Topologia** topologia ogólna, topologia algebraiczna, teoria homologii i homotopii, teoria węzłów
- **XVI Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna** analiza danych, procesy stochastyczne, teoria decyzji
- **XVII Analiza numeryczna i teoria algorytmów** aproksymacje numeryczne, obliczenia symboliczne, aspekty komputerowe algorytmów numerycznych, sztuczna inteligencja
- **XVIII Zastosowania matematyki** zastosowania matematyki w mechanice, termodynamice, elektrodynamice, mechanice kwantowej, teorii względnosci, fizyce cząstek elementarnych, astronomii i astrofizyce, chemii, biologii, geofizyce, ekonomii, socjologii
- **XIX Historia matematyki**

Andrzej Dąbrowski, Instytut Matematyki Uniwersytetu Szczecińskiego, ul. Wielkopolska 15, 70-451 Szczecin; e-mail: andrzej.dabrowski@usz.edu.pl